1. ***(Problema 1) S'ha descobert un planeta extrasolar que gira al voltant d'una estrella dues vegades major que el Sol i s'han pogut determinar les següents característiques orbitals: radi del periastre 1,0 UA, radi de l'apoastre 2,0 UA, velocitat del periastre 20 km/s.***
   a) Calcula els semieixos a i b així com l'excentricitat de l'òrbita. (1 punt)
   b) Què val la velocitat a l'apoastre? (1 punt)

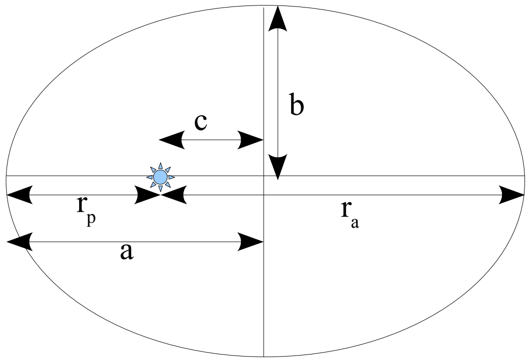
Solució:

Dades

r_p = 1,0 UA

r_a = 2,0 UA

v_p = 20 km/s



Esquema d'una el·lipse

a) Aplicarem les relacions que hi ha a una el·lipse entre semieixos major, a, i menor, b, distància al centre, c, radis del periastre, r_p, i de l'apoastre, r_a, i de l'excentricitat, ε.

$$a=\frac{r_a+r_p}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}\,UA \qquad c=\frac{r_a-r_p}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\,UA$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}\,UA \qquad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}\,UA$$

b) Aplicarem el **principi de conservació del moment angular**, deduït de la segona llei de Kepler, que es compleix a les òrbites el·líptiques, i ho farem en el periastre i l'apoastre, on els angles entre el radi (r) i la quantitat de moviment (p = m·v) són rectes:

$$r_a\cdot p_a\cdot\sin 90^o=r_p\cdot p_p\cdot\sin 90^o \qquad \rightarrow \qquad v_a=\frac{r_p}{r_a}\cdot v_p=\frac{1{,}0\,UA}{2{,}0\,UA}\cdot 20\,km/s=10\,km/s$$

El valor és menor ($v_a < v_p$) com era d'esperar per la 2ª llei de Kepler, a major distància del focus menor velocitat.

2. ***(Problema 4) Tenim un condensador format per dues plaques metàl·liques horitzontals (una damunt de l'altra) carregades, una positivament i l'altra negativament, i separades 15,0 cm al buit. El camp elèctric entre elles és uniforme i el seu mòdul val 3 000 N/C. Un electró es deixa lliure des del repòs en un punt P damunt la placa negativa que està a la part de baix del condensador. Dades: $q_e = -1{,}602\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. Calcula:***
   a) ***La diferència de potencial entre ambdues plaques. (1 punt)***
   b) ***L'acceleració a la qual està sotmès l'electró. (1 punt)***
   c) ***La velocitat que durà en el moment de xocar en un punt A, amb l'altra placa. (1 punt)***

Solució:

Dades (SI):

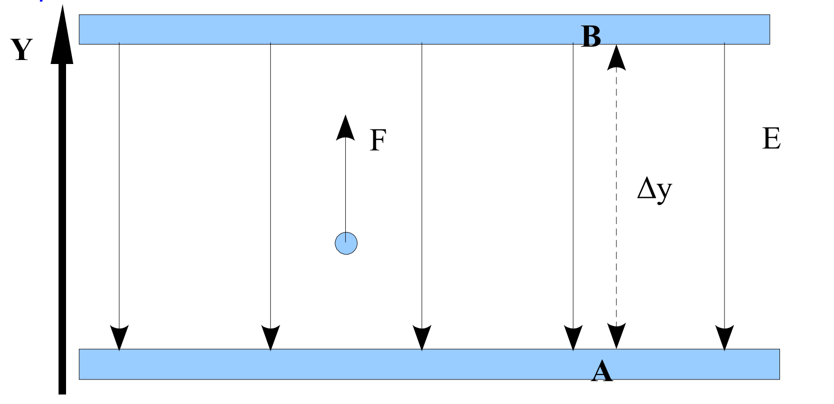
Δy = 15,0 cm = 0,150 m

E = 3 000 N/C

$q_e = -1{,}602\cdot10^{-19}$ C

$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg (2 xifres significatives !!)

Esquema del condensador



a) Per calcular la diferència de potencial, ΔV, emprarem la relació que hi ha entre el camp, E, i la separació de punts, Δy. Però aquí hi ha un problema de signes: El camp E augmenta per avall i l'espai Δy_{AB} augmenta per amunt. La fórmula està pensada per anar amb el sentit del camp i, per això calcula ΔV_{BA}. Nosaltres (pels càlculs posteriors) necessitam ΔV_{AB} per això ho hem d'escriure així:

$$|\vec{E}|=\frac{-\Delta V_{BA}}{\Delta y_{AB}}=\frac{+\Delta V_{AB}}{\Delta y_{AB}} \quad \rightarrow \quad \Delta V_{AB}=|\vec{E}|\cdot\Delta y_{AB}=3\,000\,N/C\cdot 0{,}150\,m=450\,V=0{,}45\,kV$$

b) L'acceleració de l'electró, a, la podem calcular igualant la força elèctrica, F_e, a la força de la segona llei de Newton, F = m·a. Ho podem fer en forma vectorial:

$$\left\{\begin{matrix}\vec{F}=q_e\cdot\vec{E}\\ \vec{F}=m_e\cdot\vec{a}\end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{a}=\frac{q_e}{m_e}\cdot\vec{E}=\frac{-1{,}602\cdot10^{-19}\,C}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg}\cdot(-3000\cdot\vec{j}\,N/C)=0{,}53\cdot10^{15}\cdot\vec{j}\,m/s^2$$

c) (**Opció 1**) Per calcular la velocitat basta emprar l'equació del MRUA que relaciona velocitats amb espais (la velocitat inicial, v_A, és zero):

$$v_B^2-v_A^2=2\cdot a\cdot\Delta y \quad \rightarrow\rightarrow \quad v_B=\sqrt{2\cdot a\cdot\Delta y}=\sqrt{2\cdot 0{,}53\cdot10^{15}\,m/s^2\cdot 0{,}15\,m}=13\cdot10^{6}\,m/s$$

c) (**Opció 2**) També es pot calcular emprant el **principi de conservació de l'energia** ja que no actuen forces externes (la velocitat inicial, v_0, és zero):

$$E_{TA}=E_{TB} \quad \rightarrow \quad E_{cA}+E_{pA}=E_{cB}+E_{pB} \quad \rightarrow \quad 0+E_{pA}=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_B^2+E_{pB}$$

$$\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_B^2=E_{pA}-EpB=-(E_{pB}-E_{pA})=-\Delta E_{pAB}=-q_e\cdot\Delta V_{AB}$$

$$v_B=\sqrt{\frac{-2\cdot q_e\cdot\Delta V_{AB}}{m_e}}=\sqrt{\frac{-2\cdot(-1{,}602\cdot10^{-19}\,C)\cdot 450\,V}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg}}=13\cdot10^{6}\,m/s$$

3. (Problema 2) L'Agència Espacial Europea (ESA) ha de situar un satèl·lit artificial de comunicacions de massa 1 500 kg en òrbita a la Terra. Primer se'l situa en una òrbita a 300 km d'alçada respecte de la superfície terrestre i, després d'unes maniobres, se'l col·loca en la seva òrbita definitiva a 35 000 km d'alçada.

a) Determina el període i l'energia cinètica a l'òrbita baixa. (1 punt)

b) Determina el treball que han de fer els motors per canviar d'òrbita. (1 punt)

Dades: R_{Terra} = 6 370 km; M_{Terra} = $6{,}00\cdot10^{24}$ kg; G = $2/3\cdot10^{-10}$ N·m²/kg².

Solució:

Dades (SI)

m = 1 500 kg = $1{,}500\cdot10^3$ kg (satèl·lit)

R_T = 6 370 km = $6{,}37\cdot10^6$ m

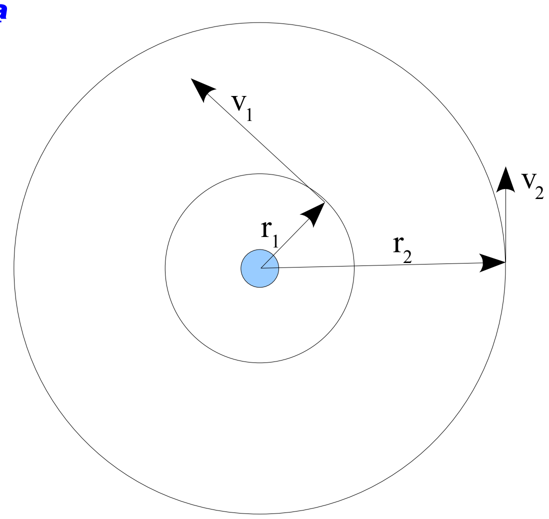
M_T = $6{,}00\cdot10^{24}$ kg

G = $2/3\cdot10^{-10}$ N·m²/kg²

h_1 = $3{,}00\cdot10^5$ m = $0{,}300\cdot10^6$ m

h_2 = $35{,}000\cdot10^6$ m

Esquema



Abans, calcularem els radis d'ambdues òrbites:

$r_1 = R_T + h_1 = 6{,}37\cdot10^6\ m + 0{,}3\cdot10^6\ m = 6{,}67\cdot10^6\ m$

$r_2 = R_T + h_2 = 6{,}37\cdot10^6\ m + 35\cdot10^6\ m = 41{,}37\cdot10^6\ m$

a) Suposarem que ambdues òrbites són circulars. A la primera òrbita la força gravitatòria, F_g, és una força centrípeta, F_c, que produeix el moviment circular. Igualarem, doncs, ambdós mòduls i obtendrem la velocitat lineal, v_1, del satèl·lit a la primera òrbita.

$$\left\{\begin{array}{c} |\vec{F}_c| = m\cdot\dfrac{v_1^2}{r_1} \\ |\vec{F}_g| = G\cdot\dfrac{M_T\cdot m}{r_1^2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad m\cdot\frac{v_1^2}{r_1} = G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r_1^2}$$

$$v_1 = \sqrt{G\cdot\frac{M_T}{r_1}} = \sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2\cdot\frac{6\cdot10^{24}\,kg}{6{,}67\cdot10^6\,m}} = \sqrt{60\cdot10^6\,m^2/s^2} = 7{,}75\cdot10^3\,m/s$$

Amb la velocitat a l'òrbita baixa podem determinar el període, T_1 i l'energia cinètica, E_{c1}, del satèl·lit a l'òrbita baixa:

$$v_1 = \frac{2\cdot\pi\cdot r_1}{T_1} \quad\rightarrow\quad T_1 = \frac{2\cdot3{,}1416\cdot6{,}67\cdot10^6\,m}{7{,}75\cdot10^3\,m/s} = 5{,}41\cdot10^3\,s = 1{,}50\,h$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2 = \frac{1}{2}\cdot1{,}5\cdot10^3\,kg\cdot(7{,}75\cdot10^3\,m/s)^2 = 45{,}0\cdot10^9\,J = 45{,}0\,GJ$$

b) Per calcular el treball extern, W_{ext}, cal aplicar el **principi de conservació de l'energia mecànica** a ambdues òrbites. El treball extern ha de sortir positiu perquè es necessita energia per canviar d'una òrbita baixa a una més alta. Però abans vegem una relació que hi ha entre energia cinètica i energia potencial a les òrbites circulars (s'empra la relació de v^2 obtinguda més amunt):

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (G \cdot \frac{M_T}{r}) = \frac{-E_p}{2}$$

$$W_{ext} = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = \frac{-Ep_2}{2} + E_{p2} - (\frac{-E_{p1}}{2} + E_{p1}) = \frac{E_{p2}}{2} - \frac{E_{p1}}{2}$$

$$W_{ext} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2 \cdot r_2} - (-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2 \cdot r_1}) = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

$$W_{ext} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2 \cdot \frac{6{,}00 \cdot 10^{24} kg \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 kg}{2} \cdot (\frac{1}{6{,}67 \cdot 10^6 m} - \frac{1}{41{,}37 \cdot 10^6 m})$$

$$W_{ext} = 37{,}7 \cdot 10^9 J = 37{,}7 GJ$$

4. (Problema 3) En cadascun dels punts (0, 0), (0, 4) i (3, 0) d'un sistema de coordenades cartesià en metres, hi ha una càrrega de 2,00 μC.

a) Calcula i representa el camp elèctric que creen, en conjunt, en el punt (3, 4). (1 punt)

b) Calcula el potencial en el punt (3, 4) i en el punt (-3, 0). (1 punt)

c) Quin és el treball extern que necessitam fer per traslladar una altra càrrega de -5,00 μC des del punt (3, 4) fins el punt (-3, 0)? (1 punt)

Solució:

Dades (SI)

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C

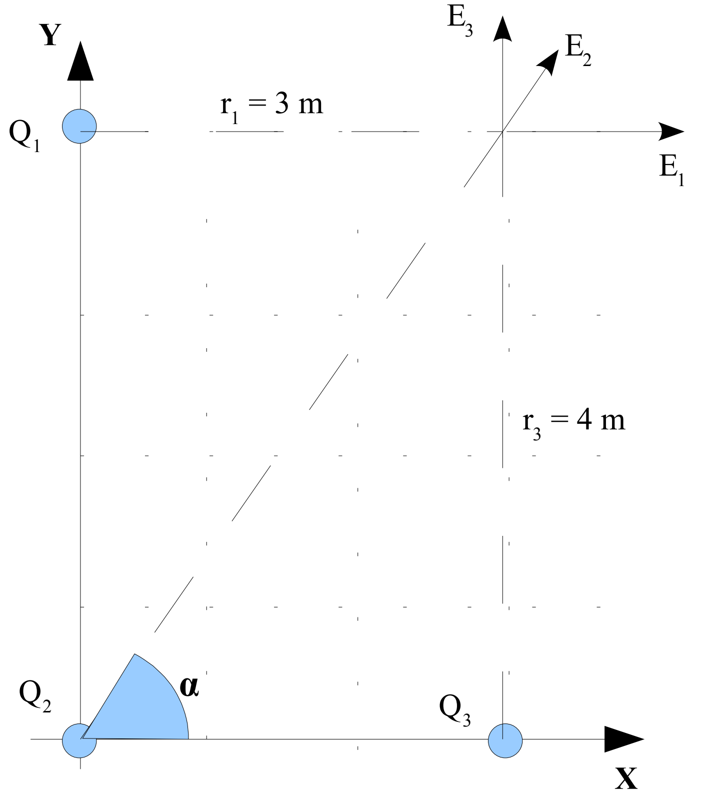
$r_1 = 3$ m (exactes)

$r_2 = 4$ m (exactes)

$q = -5{,}00\ \mu C = -5{,}00 \cdot 10^{-6}$ C

$K_0 = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$

Esquema 1: Camp elèctric a (3; 4)



a) Per calcular el vector intensitat del camp elèctric en basarem en el gràfic adjunt on s'han representat les diferents contribucions de cada càrrega. Hem de calcular els mòduls dels tres vectors i, després descompondre el vector E_2 en les seves components. Per fer-ho necessitam conèixer la distància r_2 i els sinus i cosinus de l'angle d'aquesta distància r_2 amb l'eix de les X.

$$r_2 = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\,m \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

Calculem, ara sí, els mòduls (suposarem que el medi que hi ha és el buit):

$$|\vec{E}_1| = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = k \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{3^2} = k \cdot \frac{2}{9} \cdot 10^{-6}\, N/C$$

$$|\vec{E}_2| = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} = k \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{5^2} = k \cdot \frac{2}{25} \cdot 10^{-6}\, N/C$$

$$|\vec{E}_3| = k \cdot \frac{Q_3}{r_3^2} = k \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{4^2} = k \cdot \frac{2}{16} \cdot 10^{-6}\, N/C$$

Descomponem el vector E_2

$$|\vec{E}_{2x}| = k \cdot \frac{2}{25} \cdot 10^{-6} \cdot \cos\alpha\, N/C = k \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{3}{5} \cdot 10^{-6}\, N/C = k \cdot \frac{6}{125} \cdot 10^{-6}\, N/C$$

$$|\vec{E}_{2y}| = k \cdot \frac{2}{25} \cdot 10^{-6} \cdot \sin\alpha\, N/C = k \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{4}{5} \cdot 10^{-6}\, N/C = k \cdot \frac{8}{125} \cdot 10^{-6}\, N/C$$

Ara escriurem les intensitats dels tres camps elèctrics en forma vectorial:

$$\vec{E}_1=\frac{2}{9}\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{i} \qquad +0\,\vec{j}\;N/C$$
$$\vec{E}_2=\frac{6}{125}\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{i} \quad \frac{+8}{125}\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{j}\;N/C$$
$$\vec{E}_3=0\,\vec{i} \qquad \frac{2}{16}\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{j}\;N/C$$

Per acabar calcularem el vector intensitat del camp elèctric resultant en el punt (3; 4) i, també, el seu mòdul aplicant el teorema de Pitàgores:

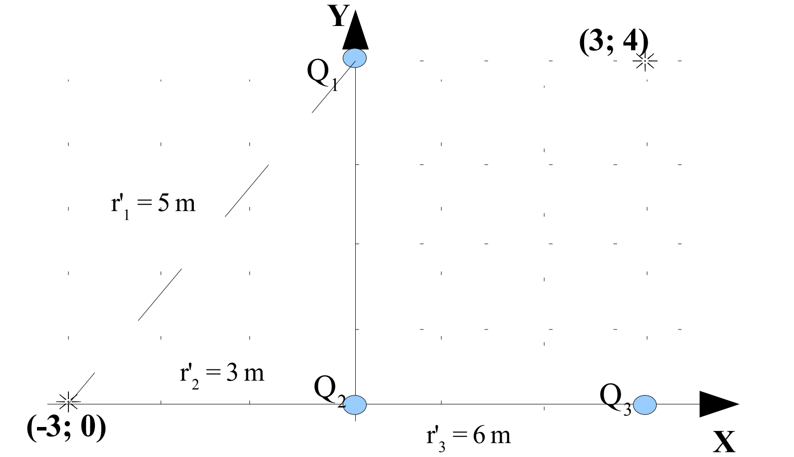
$$\vec{E}(3;4)=0{,}270\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{i}+0{,}189\cdot k\cdot 10^{-6}\cdot\vec{j}\;N/C$$

$$\vec{E}(3;4)=2{,}43\cdot 10^{3}\cdot\vec{i}+1{,}70\cdot 10^{3}\cdot\vec{j}\;N/C=2{,}43\cdot\vec{i}+1{,}70\cdot\vec{j}\;kN/C$$

$$|\vec{E}(3;4)|=\sqrt{2\,430^2+1\,700^2}=2{,}97\cdot 10^{3}\;N/C=2{,}97\;kN/C$$

b) Per calcular el potencial en els punts (3; 4) i (0; 3) sumarem de forma escalar els potencials que crea cada càrrega en els punts indicats al grafic adjunt:

Esquema 2: Potencials elèctrics



$$V(3;4)=k\cdot\frac{Q_1}{r_1}+k\cdot\frac{Q_2}{r_2}+k\cdot\frac{Q_3}{r_3}=k\cdot Q\cdot\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$
$$V(3;4)=k\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=1{,}57\cdot k\cdot 10^{-6}\,V=14{,}1\cdot 10^{3}\,V=14{,}1\,kV$$

Les distàncies de cada càrrega al punt (-3; 0) es poden calcular directament al gràfic aplicant el teorema de Pitàgores pel r_1', però és un valor ja calculat perquè $r_1' = r_2$:

$$V(-3;0)=k\cdot\frac{Q_1}{r_1'}+k\cdot\frac{Q_2}{r_2'}+k\cdot\frac{Q_3}{r_3'}=k\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1{,}40\cdot k\cdot 10^{-6}\,V=12{,}6\cdot 10^{3}\,V=12{,}6\,kV$$

c) Finalment el treball extern que s'ha de fer per desplaçar una càrrega q = - 5 μC és:

$$W_{ext}=-W_{AB}=-(-q\cdot\Delta V)=-5\cdot 10^{-6}\,C\cdot(12{,}6-14{,}1)\cdot 10^{3}\,V=0{,}0075\,J=7{,}5\,mJ$$

El signe positiu indica que hem de realitzar una aportació d'energia en forma de treball extern. La càrrega no es mou per sí sola, no és un procés espontani. Era evident, les càrregues negatives van espontàniament de potencials baixos (o negatius) a potencials alts (o positius), just al contrari de les positives, i en el nostre cas la càrrega negativa va d'un potencial alt a un de baix.