1. 1.El satèl·lit artificial més vell en òrbita a la Terra és el Vanguard I, llançat el 3 de març de 1958. La seva massa és d'1,47 kg. La seva òrbita inicial tenia una distància mínima al centre de la Terra de 7,02·10⁶ m (perigeu), i la seva velocitat en aquest punt era de 8,23 km/s.

a) Determina l'energia total del satèl·lit. (1 punt)
b) Calcula el mòdul del moment angular del satèl·lit. (1 punt)
c) Què val la velocitat a l'apogeu? (1 punt)
d) Què val el radi de l'apogeu? (0,5 punts)
e) Quin és el semieix major de l'òrbita? (0,5 punts)
f) Quin és el període d'aquesta òrbita? (0,5 punts)

Dades: $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ **kg;** $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ **N·m²/kg²**

Solució:

Dades

$m = 1{,}47$ kg

$r_p = 7{,}02\cdot 10^6$ m

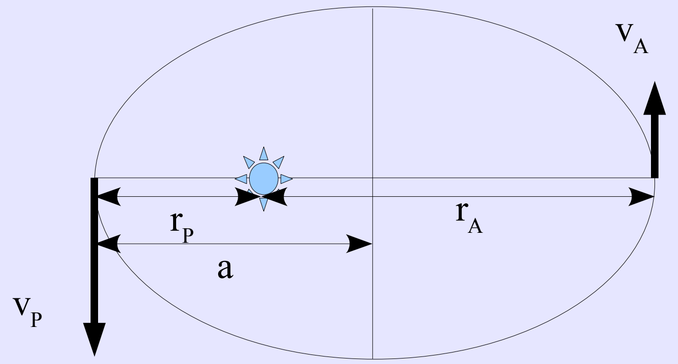
$v_p = 8\,230$ m/s

$M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²

Xifres significatives = 3

Esquema d'una òrbita el·líptica



a) Per calcular l'energia mecànica al perigeu, E_p, cal sumar l'energia cinètica, K_p, i l'energia potencial, U_p, al perigeu amb les dades que tenim. Sabem que **ha de donar un valor negatiu ($E_P < 0$)** ja que és una òrbita tancada:

$$E_P = K_P + U_P = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_P^2 + \left(-G\cdot\frac{M\cdot m}{r_P}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1{,}47\,kg\,8\,230^2\,(m/s)^2 - 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\,kg\cdot 1{,}47\,kg}{7{,}02\cdot 10^6\,m} = -33{,}74\,MJ$$

Solució: E_P = - 33,7 MJ

b) El mòdul del moment angular al perigeu, $|\mathbf{L_P}|$ el podem calcular amb les dades que tenim (l'angle entre els vectors radi i velocitat al perigeu és de 90º):

$$|\vec{L}_P| = |\vec{r}_P|\cdot m\cdot|\vec{v}_P|\cdot\sin 90^\circ = 7{,}02\cdot 10^6\,m\cdot 1{,}47\,kg\cdot 8\,230\,m/s = 8{,}493\cdot 10^{10}\,kg\cdot m^2/s$$

Solució: $|L_P|$ = 8,49·10¹⁰ kg·m²/s

c) Per calcular la velocitat a l'apogeu, v_A, hem d'aplicar dos **principis de conservació, el de l'energia mecànica i el del moment angular**:

$$|\vec{L}_A|=|\vec{L}_P| \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}_A|\cdot m\cdot|\vec{v}_A|=8{,}493\cdot 10^{10} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}_A|=\frac{8{,}493\cdot 10^{10}}{m\cdot|\vec{v}_A|} \qquad [1]$$

$$E_A=E_P \quad \Rightarrow \quad K_A+U_A=-33{,}74\cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot|\vec{v}_A|^2-G\cdot\frac{M_T\cdot m}{|\vec{r}_A|}=-33{,}74\cdot 10^6 \qquad [2]$$

Ara podem substituir l'equació [1] a la [2] i resoldre l'equació de 2^n grau (simplificarem la notació dels mòduls de la velocitat):

$$\frac{m\cdot v_A^2}{2}-\frac{G\cdot M_T\cdot m}{\frac{8{,}493\cdot 10^{10}}{m\cdot v_A}}=-33{,}74\cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{1{,}47\cdot v_A^2}{2}-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1{,}47^2\cdot v_A}{8{,}493\cdot 10^{10}}=-33{,}74\cdot 10^6$$

$$0{,}735\cdot v_A^2-10\,148\cdot v_A+33{,}74\cdot 10^6=0$$

$$v_A=\frac{-(-10\,148)\pm\sqrt{(-10\,148)^2-4\cdot 0{,}735\cdot 33{,}74\cdot 10^6}}{2\cdot 0{,}735}=\begin{Bmatrix}8\,227\,m/s\\ 5\,580\,m/s\end{Bmatrix}$$

El valor correcte és el 5 580 m/s perquè ha de ser **menor que v_P**, segons la 2ª llei de Kepler. L'altra solució 8 227 m/s correspon a v_P. No coincideix exactament per les imprecisions dels valors emprats (8 227 ≈ 8 230).

Solució: v_A = 5,58 km/s

d) El radi de l'apogeu, r_A, s'obté a partir de la velocitat a l'apogeu obtinguda i emprant l'equació [1]. Ha de ser un valor **major que r_P** per la 2ª llei de Kepler:

$$r_A=\frac{8{,}493\cdot 10^{10}}{m\cdot v_A}=\frac{8{,}493\cdot 10^{10}}{1{,}47\cdot 5\,580}=10{,}35\cdot 10^6\,m$$

Solució: r_A = 10,4·10⁶ m

e) El semieix major és el radi mitjà i es calcula fàcilment amb els radis de l'apogeu i del perigeu fent una mitjana aritmètica:

$$a=\frac{r_P+r_A}{2}=\frac{7{,}02\cdot 10^6\,m+10{,}4\cdot 10^6\,m}{2}=8{,}71\cdot 10^6\,m$$

Solució: a = 8,71·10⁶ m

f) Per a calcular el període de l'òrbita s'ha de tenir en compte que és una òrbita el·líptica i no es poden emprar les equacions de les òrbites circulars. Emprarem la 3ª llei de Kepler on k es pot obtenir d'una òrbita circular ja que val el mateix per a totes les òrbites.

$$T^2=k\cdot a^3=\frac{4\cdot\pi^2}{G\cdot M_T}\cdot a^3 \quad \Rightarrow \quad T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot(8{,}71\cdot 10^6)^3}=8\,087\,s=2{,}25\,h$$

Solució: T = 2,25 h

2. Dues càrregues puntuals iguals Q_1 i Q_2 de 2,00 μC estan localitzades damunt l'eix de les X en el buit. Una en el punt x_1 = –1,00 m i l'altra en el x_2 = 1,00 m.

a)És correcte la representació del camp elèctric produït per les càrregues Q_1 i Q_2 que hi ha més avall? Explica-ho. (1 punt)

b)Determina la intensitat del camp elèctric damunt l'eix de les Y en el punt P situat a y_P = 0,50 m. (1 punt)

c)Calcula la força elèctrica sobre una càrrega q = –3,00 μC col·locada sobre l'eix de les Y en el punt P. (0,5 punts)

d)Quina energia potencial elèctrica tendrà la càrrega q en el punt P? (1 punt)

e)Quina diferència de potencial elèctric hi ha entre el punt P i l'origen de coordenades (0; 0)? (1 punt)

f)La càrrega q es mourà espontàniament o forçadament des del punt P al punt (0; 0)? Calcula el treball que realitza el camp elèctric.(1 punt)

Solució:

Dades

$Q_1 = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C

$Q_2 = 2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C

x_1 = -1,00 m

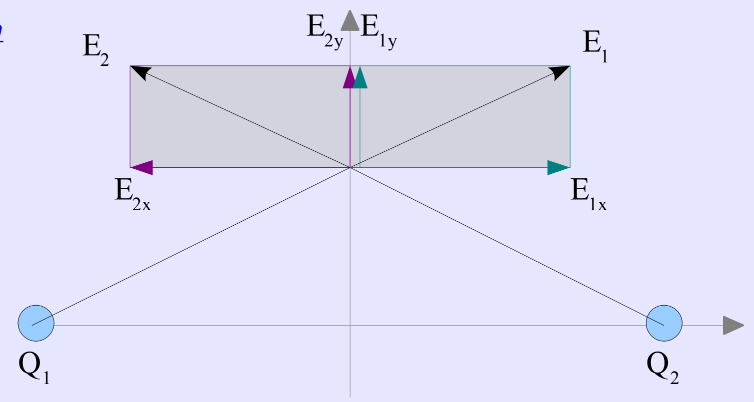
x_2 = +1,00 m

y_P = 0,50 m

$q = -3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C

Xifres significatives = 3

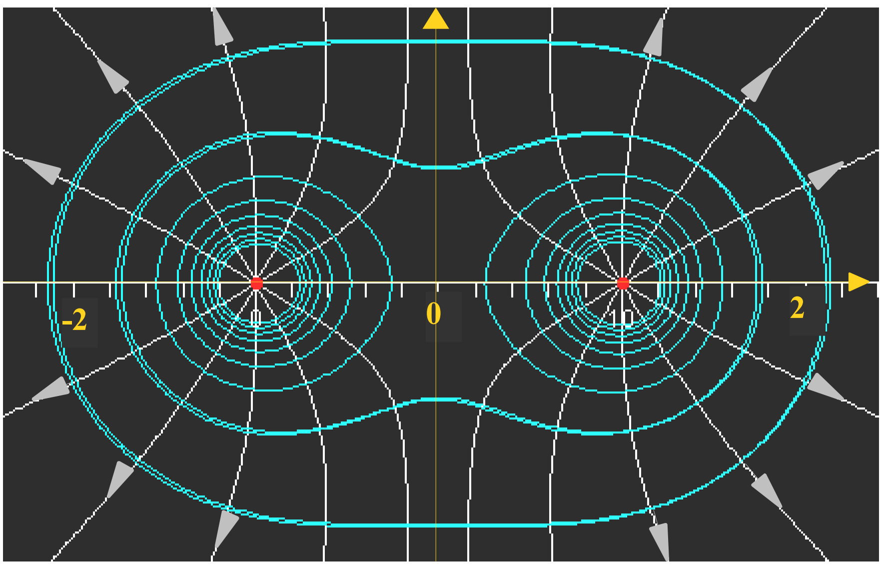
Esquema



a) La representació que hi ha a l'enunciat no és correcte per les següents raons:

1. Les **línies de camp** van d'una càrrega a l'altra, això indica que tenen polaritats diferents. En el nostre cas són càrregues del mateix signe i no donaran aquestes línies.
2. A la figura hi ha una **línia equipotencial** de valor 0 V. Quan tenim vàries càrregues del mateix signe no existeix cap punt on el potencial elèctric sigui zero perque els diferents potencials no es poden anul·lar.

La representació correcte és:



b) A l'esquema hi ha representats els dos vectors intensitat del camp elèctric en el punt P. Per la simetria de la distribució (càrregues iguals i distàncies iguals) s'observa que les components dels vectors camp elèctric en la direcció X s'anul·len i no cal calcular-les. Les dues components sobre l'eix Y són iguals i basta calcular-ne una i multiplicar per 2.

$$|\vec{E}_1| = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{1{,}25\, m^2} = 14\,400\, N/C$$

$$|\vec{E}_{1y}| = |\vec{E}_1| \cdot \sin\alpha = 14\,400 \frac{N}{C} \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}25}} = 6\,439{,}88\, N/C$$

$$|\vec{E}| = 2 \cdot |\vec{E}_{1y}| = 2 \cdot 6\,439{,}88\, N/C = 12879{,}76\, N/C$$

Solució: $\vec{E} = 12{,}9 \cdot 10^3 \vec{j}\, N/C$

c) La força elèctrica sobre una càrrega q al punt P es calcula amb el vector intensitat del camp elèctric al punt P:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -3 \cdot 10^{-6} C \cdot 12879{,}76 \vec{j} \frac{N}{C} = -38639{,}28 \vec{j}\, N$$

Solució: $\vec{F} = -38{,}6 \cdot 10^3 \vec{j}\, N$

d) Per a calcular l'energia potencial cal calcular l'energia potencial deguda a cadascuna de les càrregues Q i sumar:

$$U = U_1 + U_2 = K \cdot \frac{q \cdot Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{q \cdot Q_2}{r_2} = 2 \cdot K \cdot \frac{q \cdot Q_1}{r_1} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-6} C \cdot 2 \cdot 10^{-6} C}{\sqrt{1{,}25}\, m} = -0{,}096\,598\, J$$

Solució: U = -0,096 6 J = - 96,6 mJ

e) Per a calcular la diferència de potencial entre ambdós punts O i P s'ha de calcular el potencial degut a les càrregues Q a ambdós punts. Considerarem el punt final l'origen de coordenades i l'inicial el punt P:

$$V_O = V_{1O} + V_{2O} = 2 \cdot V_{1O} = 2 \cdot K \cdot \frac{Q_1}{r_{1O}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{1\, m} = 36\,000\, V$$

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} = 2 \cdot V_{1P} = 2 \cdot K \cdot \frac{Q_1}{r_{1P}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{\sqrt{1{,}25}\, m} = 32\,199\, V$$

$$\Delta V_{PO} = V_O - V_P = 36\,000\, V - 32\,199\, V = 3\,801\, V$$

Solució: ΔV_{PO} = 3,80·10^3 V = 3,80 kV

f) La càrrega **q és negativa**, per la qual cosa **es mou de potencials elèctrics baixos a potencials elèctrics alts de forma espontània**. Les càrregues positives ho fan a l'inrevés. En el nostre cas el punt P està a un potencial més baix (32 kV) que el punt O (36 kV) i **es mourà espontàniament**. Els moviments espontanis són deguts a treballs del camp elèctric positius ($W_{PO} > 0$) que impliquen un augment de l'energia cinètica ($\Delta K_{PO} > 0$) i una disminució de l'energia potencial ($\Delta U_{PO} < 0$), l'energia potencial es transforma en energia cinètica i es conserva l'energia total ($\Delta E_{PO} = 0$).

El treball sortirà positiu i val:

$$W_{PO} = -q \cdot \Delta V_{PO} = -(-3 \cdot 10^{-6} C) \cdot 3\,801\, V = +0{,}011\,403\, J$$

Solució: WPO = 0,011 4 J = 11,4 mJ