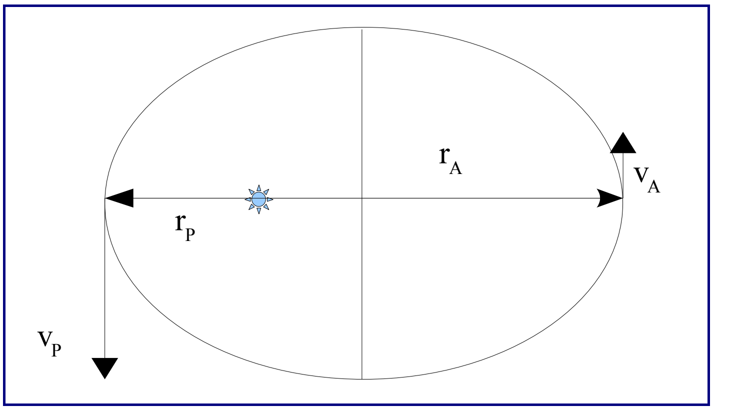
QÜESTIONS TEÒRIQUES

1. ***Un exoplaneta (un planeta que no és del Sistema Solar) segueix una òrbita el·líptica enrevoltant la seva estrella. Quan passa pel periastre, P, i per l'apoastre, A, explica i justifica les següents afirmacions:***
   a) ***El seu moment angular és igual en ambdós punts i la seva velocitat diferent en sentit i mòdul.***
   b) ***L'energia mecànica és igual en ambdós punts.***

Solució:



a) El moviment orbital d'un exoplaneta és un cas d'un sistema on només actuen forces internes (interacció gravitatòria). En aquests casos es compleix el **principi de conservació del moment angular**, que es pot deduir de la **2ª llei de Kepler** o **llei de les àrees**. Per tant en qualsevol punt el moment angular es manté constant. Si ho aplicam al periastre, P, i a l'apoastre, A, tenim:

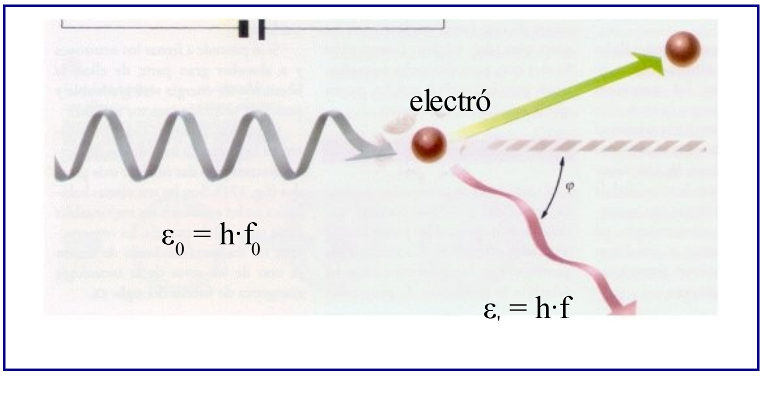
$$\begin{Bmatrix} \vec{L}_P = \vec{r}_P \wedge \vec{p}_P = \vec{r}_P \wedge m \cdot \vec{v}_P \\ \vec{L}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{p}_A = \vec{r}_A \wedge m \cdot \vec{v}_A \end{Bmatrix} \quad \vec{L}_P = \vec{L}_A \quad \rightarrow \quad \vec{r}_P \wedge m \cdot \vec{p}_P = \vec{r}_A \wedge m \cdot \vec{v}_A \quad \rightarrow \quad \vec{r}_P \wedge \vec{v}_P = \vec{r}_A \wedge \vec{v}_A$$

D'aquesta expressió observam que si el radi augmenta ($r_P < r_A$) la velocitat ha de disminuir ($v_P > v_A$) per mantenir el moment angular constant. Els dos vectors radi (apoastre i periastre) tenen la mateixa direcció però sentits oposats, per tant, com que s'ha de mantenir la direcció i sentit del vector moment angular, els vectors velocitat (apoastre i periastre) han de tenir la mateixa direcció però sentits oposats.

b) El **camp gravitatori és un camp conservatiu**, per la qual cosa l'energia mecànica es conserva en tota l'òrbita $E_P = E_A$.

2. ***Quin fenomen de la radiació electromagnètica no es pot explicar de l'efecte Compton amb la teoria ondulatòria clàssica? Com s'explica correctament amb la mecànica quàntica?***

Solució:



L'efecte Compton es produeix quan la radiació d'alta freqüència (raig X) es dispersada pels electrons extern d'un blanc (en l'experiment original s'emprà grafit). Segons la teoria ondulatòria clàssica l'ona electromagnètica no ha de canviar de direcció i s'ha d'atenuar, és a dir, a de disminuir la seva amplitud de forma equivalent a l'energia absorbida pel material. Les altres magnituds de l'ona (freqüència, velocitat,...) s'han de mantenir constants.

L'observació que va fer Compton contradiu aquesta explicació. Observà que la radiació que surt té una freqüència, f, menor que la de radiació incident, f_0. També observà que la radiació es desvia. L'explicació és senzilla si consideram que **la radiació electromagnètica té naturalesa corpuscular**, que està formada per paquets de llum, de fotons. Els fotons en xocar contra els electrons externs dels àtoms perden energia la qual cosa es tradueix amb una disminució de la seva freqüència segons l'**equació de Planck**.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 = h \cdot f_0 \\ \epsilon = h \cdot f \end{Bmatrix} \quad si \quad \epsilon < \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad f < f_0$$

També es compleix que la quantitat de moviment, o moment lineal, del fotó incident és igual a la suma vectorial de les quantitats de moviment del fotó dispersat més la de l'electró que s'ha extret. La qual cosa indica que ens trobam davant d'un xoc elàstic (**conservació de l'energia i del moment lineal**).

3. Un electró que viatja en línia recta i amb una certa velocitat, pot travessar una zona on hi ha camp elèctric uniforme sense sofrir cap canvi ni en la seva trajectòria ni en la seva velocitat? I si travessa una zona on hi ha un camp magnètic uniforme?

Solució:

a) Si l'electró travessa un camp elèctric sempre sofrirà una força i, per la **2ª llei de Newton**, una acceleració, segons l'equació:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Si l'acceleració és paral·lela a la velocitat canviarà el seu mòdul. Si és perpendicular canviarà la seva direcció. I si forma un cert angle canviarà mòdul i direcció. Per tant no és possible.

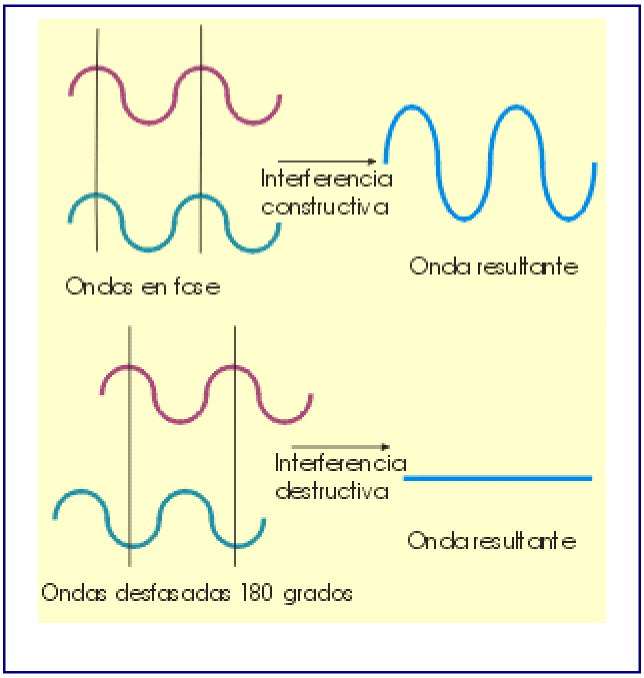
b) En un camp magnètic si la direcció de la velocitat de l'electró és paral·lela a la direcció de la inducció magnètica no es desviarà ni canviarà la velocitat, segons la **llei de Lorentz:**

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_L| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha$$

És clar que si l'angle és 0º, és sin 0º = 0, per tant la força que actuarà sobre l'electró serà nul·la i no canviarà ni la trajectòria ni el mòdul de la velocitat (**1ª llei de Newton**).

4. Suposa que estàs escoltant música dins del teu cotxe en un descampat on hi ha cobertura d'una mateixa emissora de radio per part de dues antenes que estan separades varis quilòmetres. Rebràs la senyal amb més o menys intensitat? És possible que no rebis cap senyal?

Solució:



Si a un mateix punt arriben ones coherents es produiran **interferències**. Les interferències poden ser:

a) **Constructives** (augmenta la intensitat): Es produeixen quan les ones que arriben a un mateix punt estan en fase, és a dir en el mateix estat de vibració.

b) **Destructives** (s'anul·len les ones i la intensitat és zero): Es produeixen quan les dues ones que arriben a un mateix punt estan desfassades 180º. Això significa que quan una té el màxim l'altra té el mínim i s'anul·len les vibracions.

Per tant dependrà de la posició relativa de la nostra antena receptora respecte a les distàncies a les antenes emissores. Si la diferència decamí són multiples de la longitud d'ona tendrem interferències constructives. Si són multiples senars de mitges longituds d'ona tendrem interferències destructives. En tots els altres casos hi haurà zones de més intensitat i zones de menys.

5. ***(A1) Fobos és un satèl·lit del planeta Mart que orbita seguint una trajectòria circular de 9 380 km de radi i amb un període de revolució de 7,65 h. L'altre satèl·lit de Mart, Deimos, gira en una òrbita també circular però major, de 23 460 km de radi. Determina:***

a) La massa de Mart.

b) El període de revolució del satèl·lit Deimos en hores.

c) L'energia mecànica de Deimos.

Dades: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg²; m_{Fobos} = $1{,}07\cdot10^{16}$ kg; m_{Deimos} = $2{,}24\cdot10^{15}$ kg

Solució:

Dades SI

Fobos:

$r_F = 9{,}380\cdot10^6$ m

$m_F = 1{,}07\cdot10^{16}$ kg

$T_F = 7{,}65$ h = 27 540 s

Deimos:

$r_D = 23{,}460\cdot10^6$ m

$m_D = 2{,}24\cdot10^{15}$ kg

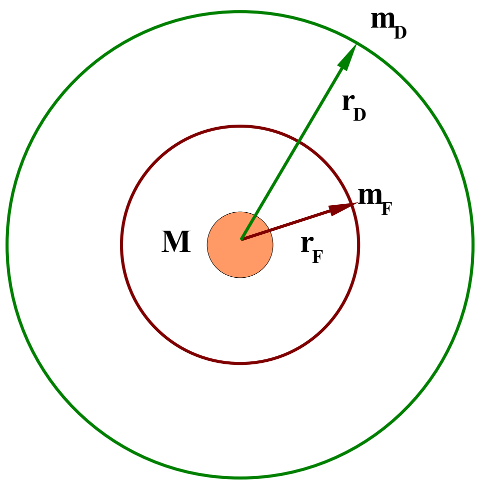
T_D = ?

Mart:

M = ?

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg²

Esquema



a) Podem calcular la massa de Mart, M, a partir de les expressions de la força centrípeta per a un moviment circular i de la força gravitatòria ja que la rotació es produïda per aquesta:

$$\left\{\begin{matrix} |\vec{F}_c| = m\cdot\dfrac{v_F^2}{r_F} \\ |\vec{F}_g| = G\cdot\dfrac{M\cdot m}{r_F^2}\end{matrix}\right\} \rightarrow m\cdot\frac{v_F^2}{r_F} = G\cdot\frac{M\cdot m}{r_F^2} \rightarrow M = \frac{4\cdot\pi^2}{G}\cdot\frac{r_F^3}{T_F^2} = \frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}\cdot\frac{(9{,}38\cdot10^6)^3}{(27540)^2} = 6{,}44\cdot10^{23}\,kg$$

b) El període de Deimos el podem obtenir aplicant la **3ª llei de Kepler**:

$$\left\{\begin{matrix} T_D^2 = k\cdot r_D^3 \\ T_F^2 = k\cdot r_F^3\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{T_D^2}{T_F^2} = \frac{k\cdot r_D^3}{k\cdot T_F^3} \rightarrow T_D = T_F\cdot\left(\frac{r_D}{r_F}\right)^{3/2} = 7{,}65\,h\cdot\left(\frac{23460}{9380}\right)^{3/2} = 30{,}3\,h$$

c) El càlcul de l'energia mecànica es pot fer sumant l'energia cinètica més l'energia potencial, però el càlcul es simplifica si substituïm el valor de la velocitat al quadrat de la 1ª equació a l'expressió de l'energia cinètica:

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_D^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(G\cdot\frac{M}{r_D}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(G\cdot\frac{M\cdot m_D}{r_D}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-E_p) = \frac{-E_p}{2}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{-E_p}{2} + E_p = \frac{E_p}{2} = -G\cdot\frac{M\cdot m_D}{2\cdot r_D} = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{6{,}44\cdot10^{23}\cdot2{,}24\cdot10^{15}}{2\cdot23{,}46\cdot10^6} = -2{,}05\cdot10^{21}\,J$$

6. (A2) Una ona transversal es propaga per una corda horitzontal, en el sentit negatiu de l'eix X, essent 10 cm la distància mínima entre punts que oscil·len en fase. Sabent que l'ona està generada per un focus emissor que vibra amb un moviment harmònic simple la qual freqüència és de 50 Hz i la seva amplitud 4,0 cm, determina:

a) La velocitat de propagació de l'ona.

b) L'expressió matemàtica de l'ona, si el focus emissor es troba situat a l'origen de coordenades i en t = 0 l'elongació és nul·la.

c) L'acceleració màxima d'oscil·lació en un punt qualsevol de la corda.

Solució:

Dades SI

Ona:

$\lambda = 0{,}10$ m

Focus:

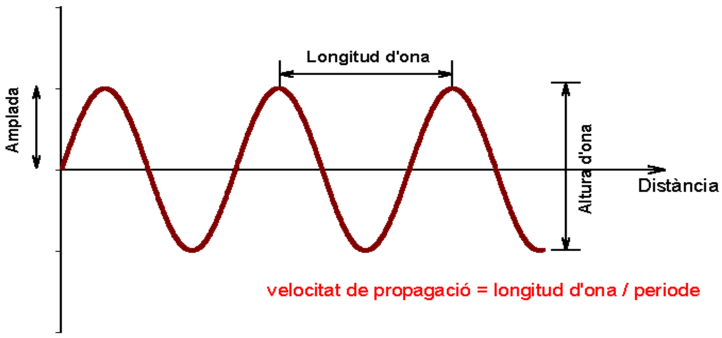
f = 50 Hz

A = 0,040 m

Condicions inicials:

t = 0 és y = 0

EsquemA



a) El càlcul de la velocitat de propagació la calculam amb la longitud d'ona i la freqüència:

$$v_{ona} = \lambda \cdot f = 0{,}10\, m \cdot 50 \frac{1}{s} = 5\, m/s$$

b) L'equació de l'ona s'obté substituïnt valors a l'**equació de d'Alembert** que agafarem en funció sinus i amb el signe + dins del parèntesi ja que l'ona viatja cap a l'esquerra (a la figura avança cap a la dreta):

$$y = A \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(f \cdot t + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] = 0{,}040 \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(50 \cdot t + \frac{x}{0{,}1}\right) + \varphi_0\right]$$

Podem calcular la fase inicial amb les condicions inicials que ens han donat

$$0 = 0{,}040 \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(50 \cdot 0 + \frac{0}{0{,}1}\right) + \varphi_0\right] = 0{,}040 \cdot \sin \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0$$

Finalment l'expressió de l'ona queda expressada en el SI: $y = 0{,}040 \cdot \sin 20 \cdot \pi (5 \cdot t + x)$

c) L'acceleració màxima s'obté derivant dues vegades aquesta equació:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}040 \cdot [\cos 20 \cdot \pi (5 \cdot t + x)] \cdot 100 \cdot \pi = 4 \cdot \pi \cdot cos20 \cdot \pi (5 \cdot t + x)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot [-\sin 20 \cdot \pi (5 \cdot t + x)] \cdot 100 \cdot \pi = -400 \cdot \pi^2 \cdot \sin 20 \cdot \pi (5 \cdot t + x)$$

D'aquí s'observa que elmàxim valor de l'acceleració serà $a_{màx} = 400 \cdot \pi^2$ m/s^2

7. (B1) Un prisma cúbic de fluorur de liti, LiF, està situat dins l'aire i per sota de la cara inferior hi incideix un raig de llum monocromàtic de 0,500 µm de longitud d'ona, formant un angle de 80,4º amb la normal segons la figura. En aquestes condicions l'angle de refracció dins del prisma és de 45,0º. Determina:

a) L'índex de refracció, n, del fluorur de liti per la longitud d'ona de 0,500 µm.

b) L'angle que formen entre sí la direcció del raig incident en el punt A amb la direcció del raig que surt del prisma en el punt B.

Dades SI

Aire:

$n_a = 1$

$\varepsilon_1 = 80,4º$

$\varepsilon_2' = ?$

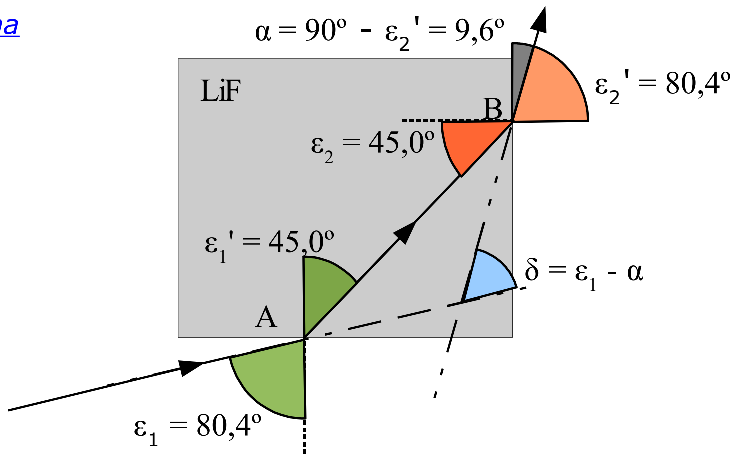
LiF:

$n_{LiF} = ?$

$\varepsilon_1' = 45º$

$\varepsilon_2 = ?$

Esquema



a) Podem calcular l'índex de refracció del LiF aplicant la **llei de Snell**:

$$n_{aire} \cdot \sin \epsilon_1 = n_{LiF} \cdot \sin \epsilon_1' \quad \Rightarrow \quad n_{LiF} = n_{aire} \cdot \frac{\sin \epsilon_1}{\sin \epsilon_1'} = 1 \cdot \frac{\sin 80,4^o}{\sin 45^o} = 1,39$$

b) Per calcular el desviament δ cal fer un parell d'operacions:

- S'observa a la figura que el raig que va d'A a B forma 45º amb la normal a A que és perpendicular a la normal al punt B. D'aquí l'angle ε_2 serà 90º - ε_1' = 90º -45º = 45º.

- Ara podem aplicar la **llei de Snell** al punt B:

$$n_{LiF} \cdot \sin \epsilon_2 = n_{aire} \cdot \sin \epsilon_2' \quad \Rightarrow \quad \sin \epsilon_2' = \frac{n_{LiF} \cdot \sin \epsilon_2}{n_{aire}} = \frac{1,39 \cdot \sin 45^o}{1} = 0,9857 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_2' = 80,4^o$$

A aquest resultat hi podríem haver arribat aplicant que els camins que segueix la llum són reversibles. Si els angles dins del prisma són iguals també ho seran els de l'aire.

- Podem calcular l'angle que forma aquest raig $\overrightarrow{AB}$ amb la superfície del punt B, que com es veu a la figura és α = 90º – ε_2' = 90º - 80,4º = 9,6º.

- Aquest angle és el que forma el raig que surt del prisma amb la vertical i quan ha entrat formava un angle de 80,4º també amb la vertical. Per tant si es desviava 80,4º i al final només es desvia 9,6º s'ha desviat un total de δ = 80,4º – 9,6º = 70,8º

8. En un llamp típic, la diferència de potencial entre el nigul (carregat a la seva part inferior negativament) i el terra (carregat positivament) és de 10^9 V (1 GV) i la quantitat de càrrega transferida des del nigul al terra val de mitjana -30 C. Suposant que el camp elèctric entre el nigul i el terra és uniforme i vertical, i que el nigul es troba situat a 500 m d'alçada:

a) Quina energia potencial elèctrica s'allibera?

b) Calcula la intensitat del camp elèctric que hi ha entre el nigul i el terra, expressa'l en forma vectorial i representa'l gràficament.

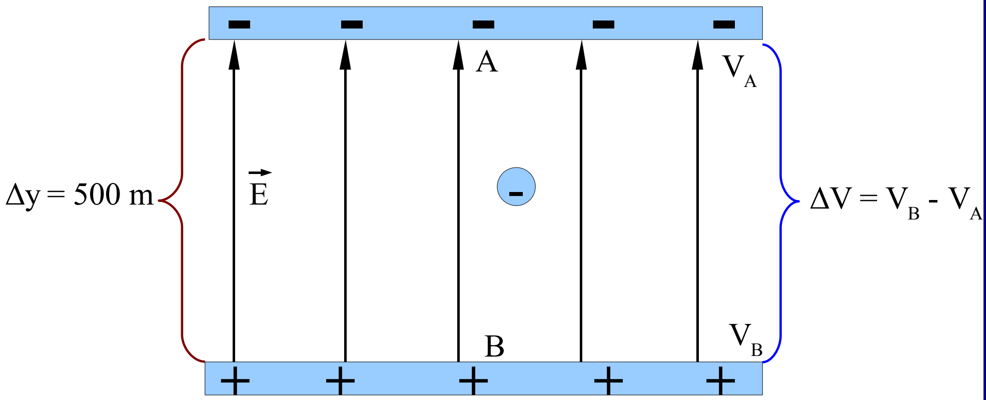
Dades SI

$\Delta V = 10^9$ V

q = -30 C

Δy = 500 m

Esquema



a) L'energia que es desprèn és la variació d'energia potencial elèctrica que experimenta la càrrega q, o el treball que realitza el camp elèctric per desplaçar-la:

$$W_{AB} = -q \cdot \Delta V_{AB} = -(-30\,C) \cdot 10^9\,V = +3 \cdot 10^{10}\,J$$

b) El camp elèctric el podem calcular a partir de la diferència de potencial i la distància que separa ambdós punts A i B:

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V_{AB}}{\Delta y_{AB}} = \frac{10^9\,V}{500\,m} = 2 \cdot 10^6\,V/m = 2 \cdot 10^6\,N/C$$

Aquesta fórmula és en mòduls, per tant no dóna ni la direcció ni el sentit. De la figura el podem deduir:

$$\vec{E} = 2 \cdot 10^6\,\vec{j}\,N/C$$

Les càrregues elèctriques negatives es mouen espontàniament de potencials menors a potencials majors o en sentit contrari al camp elèctric. Les positives ho fan a l'enrevés.

9. *El treball d'extracció del coure és 4,70 eV. Calcula:*

a) La velocitat màxima amb la qual són emesos els electrons del coure quan damunt la seva superfície incideix un feix de llum de longitud d'ona 0,250 μm.

b) La freqüència llindar del coure i la longitud d'ona corresponent.

Dades: ***$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s; $c = 3{,}00\cdot10^{8}$ m/s;***
$e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg.

<u>Dades SI</u>

W_0 = 4,70 eV → $W_0=4{,}70\,eV\cdot\frac{1{,}60\cdot10^{-19}\,C}{1\,eV}=7{,}52\cdot10^{-19}\,J$

λ = 0,250 μm = $0{,}250\cdot10^{-6}$ m

h = $6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s

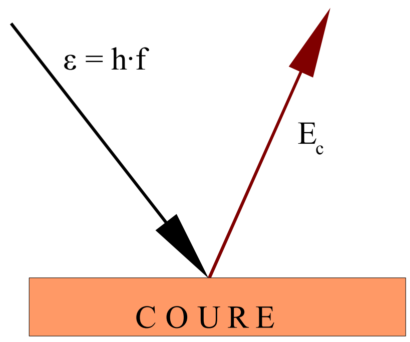
c = $3{,}00\cdot10^{8}$ m/s

electró:

e = $1{,}60\cdot10^{-19}$ C

m_e = $9{,}11\cdot10^{-31}$ kg.

<u>Esquema</u>



a) Per resoldre el problema cal aplicar l'**equació d'Einstein** $h\cdot f=W_0+E_c$ on apareix la freqüència de la radiació, per tant hem de calcular-la. Ho podem fer a partir de la relació amb la velocitat de la llum:

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot10^{8}\,m/s}{0{,}25\cdot10^{-6}\,m}=1{,}2\cdot10^{15}\,Hz$$

Ara ja podem calcular la velocitat màxima:

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot(h\cdot f-W_0)}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot(6{,}63\cdot10^{-34}\cdot1{,}2\cdot10^{15}-7{,}52\cdot10^{-19})}{9{,}11\cdot10^{-31}}}=309\cdot10^{3}\,m/s=309\,km/s$$

b) La freqüència llindar s'obté amb l'**equació de Planck** $\epsilon=h\cdot f$:

$$W_0=h\cdot f_0\quad\Rightarrow\quad f_0=\frac{w_0}{h}=\frac{7{,}52\cdot10^{-19}\,J}{6{,}63\cdot10^{-34}}=1{,}13\cdot10^{15}\,Hz$$

La longitud d'ona llindar està relacionada amb la freqüència i la velocitat:

$$\lambda_0=\frac{c}{f_0}=\frac{3\cdot10^{8}}{1{,}13\cdot10^{15}}=264\cdot10^{-9}\,m=264\,nm$$